数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 196-197

整定時間のべき級数表現について

北本卓也
TAKUYA KITAMOTO
山口大学教育学部
YAMAGUCHI UNIV., FACULTY OF EDUCATION

1 はじめに

制御系設計において、整定時間（制御対象の動作がある一定の幅に収まるまでの時間）は、制御系の性能を計る指標として非常に重要な役割を持っている．著者は、参考文献 [1] で制御系のピーク時間をパラメータのべき級数の形で求めるアルゴリズムを述べたが、本稿ではそれと同じ原理を用いて整定時間をパラメータのべき級数で求めるアルゴリズムを示す.

2 問題設定

本稿では、次の微分方程式で制御対象を取り扱う.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

ただし、A は $n\times n$ の行列、C は n 次元横ベクトル、x は n 次元の縦ベクトル、y はスカラーとする．また、A,C にパラメータ k を含むものとし、A は許容される全てのパラメータ変動において、安定（全ての固有値の実部が負）であるとする．$t=0$ での初期状態が $x=x_0$（ただし x_0 は与えられたベクトル）である時に、$y(t)$ が与えられた振動幅 $\rho\ (>0)$ に収まる最小時間、すなわち

$$\min_{w}\max_{w\le t}|y(t)|<\rho$$

(これを整定時間という）を k のべき級数で表現することを考える.

3 アルゴリズム

制御対象の微分方程式より $x(t)=e^{At}x_0$ を得るので、$y=Ce^{At}x_0$ となる．整定時間は方程式 $|Ce^{At}x_0|=\rho$ の t に関する根である．よって

$$F(t,k)=|Ce^{At}x_0|-\rho \tag{1}$$

とおき、$F(t,k)=0$ の t に関する根 $\phi(k)$ を求めればよい．$\phi(k)$ を明示的に求めることは困難なので、代わりにこのべき級数展開

$$\phi^{(q)}(k)=\alpha_0+\alpha_1k+\cdots+\alpha_qk^q\ \ (\alpha_i\in\mathbf{R})$$

を記号的ニュートン法を用いて以下のように求める．

まず、$\alpha_0 = \phi^{(0)}(k)$ を $F(t,0)$ の根として、通常のニュートン法を用いて求める．次に記号的ニュートン法

$$\phi^{(2^m-1)}(k) \equiv \phi^{(2^{m-1}-1)}(k) - \frac{F(\phi^{(2^{m-1}-1)}(k),k)}{F'(\phi^{(2^{m-1}-1)}(k),k)} \pmod{k^{2m}} \quad (m=1,2,\cdots) \tag{2}$$

を用いて、$\phi^{(1)}(k) \to \phi^{(3)}(k) \to \cdots \to \phi^{(2^m-1)}(k)$ の順番に求めていく．このときに、右辺に要素に記号を含む行列の指数関数 e^{At} が出てくるが、これは Pade 近似を用いて計算する．

このようにして、整定時間の $k=0$ の周辺でのべき級数展開は求まるが注意しなければならないことは、整定時間はその定義の性質上、k の不連続関数であるということである．よって k の値に応じて異なったべき級数展開を与える必要がある．どの k において不連続となるかは次の連立方程式の根 t,k を計算すればわかる．

$$\begin{cases} y'(t) &= 0 \\ |y(t)| &= \rho \end{cases} \tag{3}$$

以上より、整定時間のべき級数展開のアルゴリズムは以下で与えられる．

整定時間のべき級数展開の計算

(A) (3) を t,k について解いて、整定時間が不連続となる k を求める．

(B) 記号的ニュートン法を用いて、整定時間が連続である区間のべき級数展開をそれぞれ求める．

4 終わりに

パラメータを含む制御系の整定時間を、パラメータのべき級数の形で計算するアルゴリズムについて述べた．基本的な考えは参考文献 [1] のものと同じであるが、整定時間はパラメータの不連続関数であるため、その部分で参考文献 [1] とは違った注意が必要である．今後は、今回の手法を用いた制御系の設計例と数値計算誤差の検証を課題としたい．

参考文献

[1] T. Kitamoto, "Computation of the Peak of Time Response in the Form of Formal Power Series" IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E86-A, No.1, pp.3240–3250, 2003.